I вариант

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\dfrac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 61-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$\left(y(x-1)\right)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0{,}5 f(x - \pi) = \sin x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $30°$. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x|\right| = ax$ имеет три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лже цы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 105 жителей, на второй – 45, на третий – 85 и на четвёртый – 65. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Вариант 2

Задача 1 В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется разность $x_{n+1} - x_n$ вдвое меньше, чем $x_{n+1} - x_{n-1}$. Найдите отношение $\dfrac{x_{20} - x_{14}}{x_{2014} - x_{2000}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати из них больше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел больше единицы.

Задача 3. Натуральное 59-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. При этом пятерок на 8 больше, чем троек. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка AE, если $HK = 3$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$4y^2\left(x^4 + 2x^2\right) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 = 8|y|(x^2 + 1) - 2.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 3f(x - \pi) = \cos x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $60°$. Основания имеют длины 4 и 1. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x-1|\right| = ax - a$ имеет три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 95 жителей, на второй – 115, на третий – 157 и на четвёртый – 133. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 20$, $AD = 12$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ BD_1, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Вариант 3

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ сумма $x_{n+1} + x_{n-1}$ вдвое больше числа x_n. Найдите отношение $\dfrac{x_{2n} - x_n}{x_{n+2} - x_{n-2}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых сорока из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 67-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 22 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7\,5$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$\left(y(x-1)\right)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,4f(x-\pi) = \sin x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $45°$. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left|\ln|x+1|\right| = a(x+1)$ имеет три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 42 жителей, на второй – 100, на третий – 80 и на четвёртый – 68. В каком квартале рыцарей живет меньше, чем лжецов, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 6$, $AD = 15$ и $AA_1 = 8$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ A_1C и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Вариант 4

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 3$ выполняется равенство $x_{n-1} = \dfrac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3}$. Найдите значение выражения $\dfrac{x_{300} - x_{33}}{x_{333} - x_3}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых сорока пяти из них больше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел больше единицы.

Задача 3. Натуральное 57-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. При этом троек на 11 больше, чем пятерок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка AE, если $HK = 1{,}2$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$4y^2\left(x^4 + 2x^2\right) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 = 8|y|\left(x^2 + 1\right) - 2.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 2f(x - \pi) = \cos x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $45°$. Основания имеют длины 1 и 4. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x|\right| = ax$ имеет три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 109 жителей, на второй – 98, на третий – 104 и на четвёртый – 119. В каком квартале рыцарей живет больше, чем лжецов, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 10$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ AC_1, и плоскостью, проходящей через диагональ BD_1. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.